

文章编号:1008-1534(2018)01-0007-05

# 异质网络下含有相关系数的 SIR 传染病模型的建立和分析

杨 婵,张菊平

(山西大学复杂系统研究所,山西太原 030006)

**摘 要:**在疾病传播过程中,染病者和易感者有多大的倾向接触是传染病是否流行的关键因素。为了研究相关系数在疾病传播过程中的动力学行为以及其对于传染病传播动力学特性的影响,将状态节点之间的相关系数作为动态变量,利用二元组的反卷积逼近方法,在异质网络上建立了含有相关系数的 SIR 传染病动力学模型,分析了系统平衡点的存在性,给出了染病者与易感者之间相关系数存在正值的条件。在泊松分布下,模拟出了平衡状态下相关系数的三维变化图。通过生物学意义,用概率的方法,给出了系统的最终规模。结果表明,通过分析含有相关系数的 SIR 传染病模型,得到 SIR 传染病模型复杂的动力学性态,即当染病者数量趋于零时,染病者与易感者之间的相关系数不为零。研究模型在控制传染病传播的动力学研究方面具有一定的参考价值。

**关键词:**微分动力系统;相关系数;反卷积逼近;最终规模;平衡点

中图分类号:O175.1

文献标志码:A

doi: 10.7535/hbgykj.2018yx01002

## Establishment and analysis of SIR epidemic model with correlation coefficient under heterogeneous network

YANG Chan, ZHANG Juping

(Complex Systems Research Center, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

**Abstract:** In the course of disease transmission, how much contact between the infected and the susceptible is key factor of infectious diseases prevalence. Therefore, in order to study the dynamic behavior of correlation coefficients and its influence on the dynamics of disease transmission, with the correlation coefficient between the state nodes as dynamic variables, the SIR epidemic dynamic models with correlation coefficient is constructed by using deconvolution approximation method on heterogeneous network. The existence of each equilibrium of the model is analyzed, and the condition for the existence of positive correlation coefficients between the infected and susceptible individuals is derived. In the Poisson distribution, the three-dimensional variation plot of the correlation coefficient under the equilibrium state is simulated. Through biological meaning, the final size of the system is given by probabilistic method. Through analyzing the SIR epidemic model with correlation coefficient, the complicate dynamics behavior of the SIR epidemic model is obtained, namely when the infected individuals tends to be zero, the correlation coefficient between the infected and susceptible individuals is not zero. The study model has reference value in the dynam-

收稿日期:2017-09-15;修回日期:2017-10-28;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金(11501339);山西省回国留学人员科研资助项目(2014-020)

第一作者简介:杨 婵(1991—),女,山西临汾人,硕士研究生,主要从事复杂网络方面的研究。

通信作者:张菊平副教授。E-mail: zhangjuping@sxu.edu.cn

杨 婵,张菊平.异质网络下含有相关系数的 SIR 传染病模型的建立和分析[J].河北工业科技,2018,35(1):7-11.

YANG Chan, ZHANG Juping. Establishment and analysis of SIR epidemic model with correlation coefficient under heterogeneous network [J]. Hebei Journal of Industrial Science and Technology, 2018, 35(1): 7-11.

ic research of controlling infectious disease transmission.

**Keywords:** differential dynamical systems; correlation coefficient; deconvolution approximation; the final size; equilibrium point

研究传染病的传播机制,有效控制传染病的流行一直是研究者们不断研究的课题。传染病动力学是通过数学模型从理论上分析和研究疾病传播形式的科学。因为群体水平的疾病传播主要通过社会接触网络进行,所以利用复杂网络理论研究疾病传播与实际更加贴合。

采取复杂网络理论和传染病结合的方法已成为传染病动力学建模的主要趋势。在大多数网络中,特别是社会网络不同节点的度有非常大的差异,网络的异质性发挥了很大的作用,因此,异质网络中传染病动力学模型的研究变得尤为重要。VOLZ<sup>[1]</sup>基于概率母函数封闭方法建立了 SIR 传染病模型;HOUSE 等<sup>[2]</sup>给出了异质网络中 SIS 二元组逼近模型。MILLER<sup>[3]</sup>在文献[1]模型研究的基础上,进一步简化了模型。在对网络传染病模型的研究中,网络的特性如何影响传染病的流行也是十分重要的一方面。相关系数作为描述网络相关性的一种特征量,刻画了网络中具有某种特征的个体之间是否更倾向于相互连接的现象,例如,社会网络中的社会语种、种群、年龄等特征都是具有相关性的。对于传染病而言,在染病期内,染病者和易感者之间有多大的接触倾向,无疑是传染病是否流行的关键因素。KEELING<sup>[4]</sup>给出了状态节点之间相关系数的定义,通过对相关系数的动力学分析,给出了 SIR 传染病动力学模型的基本再生数;NEWMAN<sup>[5-6]</sup>给出了网络中节点度的同配系数的定义和相关结论;KEELING 等<sup>[7]</sup>结合相关系数建立了儿童疾病的相关性模型;BAUCH<sup>[8]</sup>通过引入相关系数比较了不同逼近方法的精确性;KIM 等<sup>[9-10]</sup>推导出了 HIV 染病者与易感者之间的相关系数,定义了男女易感者与染病者之间的相关系数,进一步研究了 HIV 性传播疾病;秦文惠等<sup>[11]</sup>引入相关系数,研究了具有交叉感染的双菌株模型。另外,传染病流行的最终规模也是传染病研究的重要方面<sup>[12-15]</sup>,SHERBORNE 等<sup>[13]</sup>研究了多阶段传播对于疾病峰值和最终规模的影响。在本研究中,笔者考虑网络的度分布,通过将状态之间的相关系数作为变量,建立了含有相关系数的 SIR 传染病动力学模型,并且给出了疾病的最终规模。

## 1 异质网络中含有相关系数的 SIR 传染病动力学模型

笔者考虑异质网络下含有相关系数的 SIR 传染病模型,用  $[S_k] = [S_k](t)$ ,  $[I_k] = [I_k](t)$ ,  $[R_k] = [R_k](t)$  和  $[N_k] = [N_k](t)$  分别表示  $t$  时刻,网络中度为  $k$  的易感者数量、染病者数量、恢复者数量以及总的节点数,  $[S_k I](t) = [S_k I]$  表示  $t$  时刻第 1 个节点状态为易感者且度为  $k$ , 第 2 个节点状态为染病者的二元组数量,则有:

$$\begin{cases} \frac{d[S_k]}{dt} = -\lambda[S_k I], \\ \frac{d[I_k]}{dt} = \lambda[S_k I] - \gamma[I_k], \\ \frac{d[R_k]}{dt} = \gamma[I_k], \end{cases}$$

式中:  $\lambda$  表示一个易感者和一个染病者接触被传染的概率;  $\gamma$  表示恢复率系数,  $k=0, 1, 2, \dots, \infty$ , 因为前 2 个方程中不含有  $[R_k]$ , 则只需考虑前 2 个方程。

根据基于节点的异质网络的二元组反卷积逼近<sup>[1]</sup>, 有:

$$[S_k I] \approx k[S_k] \times \frac{[SI]}{\sum_l l[S_l]},$$

则:

$$\begin{cases} \frac{d[S_k]}{dt} = -\lambda k[S_k] \frac{[SI]}{\sum_l l[S_l]}, \\ \frac{d[I_k]}{dt} = -\lambda k[S_k] \frac{[SI]}{\sum_l l[S_l]} - \gamma I_k. \end{cases} \quad (1)$$

在这里引入状态节点之间的相关系数<sup>[4]</sup>  $C_{AB}$ ,  $A, B \in \{S, I, R\}$ , 且

$$C_{AB} = \frac{N[AB]}{\langle k \rangle [A][B]},$$

$$C_{AB} \in \left[0, \frac{N}{\langle k \rangle}\right],$$

式中:  $N$  表示网络的总节点数;  $\langle k \rangle$  表示网络的平均度, 则系统(1)可表示为

$$\begin{cases} \frac{d[S_k]}{dt} = -\lambda \langle k \rangle \frac{k[S_k]}{N} \left( \frac{[S][I]}{\sum_l l[S_l]} \right) C_{SI}, \\ \frac{d[I_k]}{dt} = -\lambda \langle k \rangle \frac{k[S_k]}{N} \left( \frac{[S][I]}{\sum_l l[S_l]} \right) C_{SI} - \gamma[I_k], \end{cases} \quad (2)$$

记  $\theta(t) = [S_1](t)/N_1$ , 则由系统(2)得:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\lambda \langle k \rangle}{N} \left( \frac{[S][I]}{\sum_l l [S_l]} \right) C_{SI} \theta, \quad (3)$$

根据初始条件  $\theta(0) = 1, [S_k](0) = N_k$  推出

$$\begin{aligned} \theta(t) &= e^{-\frac{\lambda \langle k \rangle}{N} \int_0^t \left( \frac{[S](u)[I](u)}{\sum_l l [S_l](u)} \right) C_{SI}(u) du}, \\ [S_k](t) &= [S_k](0) \times \\ &\exp \left\{ \int_0^t \frac{-\lambda \langle k \rangle k}{N} \left( \frac{[S](u)[I](u)}{\sum_l l [S_l](u)} \right) C_{SI}(u) du \right\} = \\ N_k \theta^k &= N p_k \theta^k, \end{aligned}$$

则

$$[S] = \sum_k [S_k] = N \sum_k p_k \theta^k = N g(\theta), \quad (4)$$

式中:  $p_k$  为网络节点的度分布;  $g(\theta)$  表示概率母函数。

进一步有:

$$\begin{aligned} \sum_k k [S_k] &= N \sum_k k p_k \theta^k = N \theta g'(\theta), \\ \sum_k k(k-1) [S_k] &= N \sum_k k(k-1) p_k \theta^k = \\ &N \theta^2 g''(\theta), \end{aligned}$$

要想封闭系统(2), 需要导出  $C_{SI}$  的动力学方程。

因为

$$\begin{cases} \frac{d[I]}{dt} = \frac{\lambda \langle k \rangle [S][I] C_{SI}}{N} - \gamma [I], & (5) \\ \frac{dC_{SI}}{dt} = \frac{N [SI]}{\langle k \rangle [S][I]} - \left( \frac{[S]}{[S]} + \frac{[I]}{[I]} \right) C_{SI}, & (6) \end{cases}$$

则需再推导  $[SI]$  的动力学方程, 因为

$$\frac{d[SI]}{dt} = \lambda ([SSI] - [ISI] - [SI]) - \gamma [SI],$$

而对于三元组进行近似求解<sup>[2,14]</sup> 有:

$$\begin{aligned} [SSI] &= [SS] \langle k_s \rangle \frac{[SI]}{\sum_k k [S_k]} = \\ &\frac{\sum_k k(k-1) [S_k]}{(\sum_k k [S_k])^2} [SS][SI] = \\ &\frac{g''(\theta)}{N [g'(\theta)]^2} [SS][SI], \\ [ISI] &= [SI] \langle k_s \rangle \frac{[SI]}{\sum_k k [S_k]} = \\ &\frac{\sum_k k(k-1) [S_k]}{(\sum_k k [S_k])^2} [SI]^2 = \\ &\frac{g''(\theta)}{N [g'(\theta)]^2} [SI]^2, \end{aligned}$$

式中  $\langle k_s \rangle$  表示易感节点的平均余度<sup>[5]</sup>, 则

$$\begin{aligned} [SI] &= \lambda \left( \frac{g''(\theta)}{N [g'(\theta)]^2} [SS][SI] - \frac{g''(\theta)}{N [g'(\theta)]^2} [SI]^2 \right) - \\ &(\lambda + \gamma) [SI], \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{dC_{SI}}{dt} &= \frac{\lambda \langle k \rangle [S] g''(\theta)}{N^2 [g'(\theta)]^2} ([S] C_{SS} C_{SI} - [I] C_{SI}^2) - \\ &\lambda C_{SI} + \frac{\lambda \langle k \rangle [I] C_{SI}^2}{N} - \\ &\frac{\lambda \langle k \rangle [S] C_{SI}^2}{N}, \end{aligned} \quad (7)$$

而  $C_{SI}$  的动力学方程还与  $C_{SS}$  有关, 同理有:

$$\frac{dC_{SS}}{dt} = \frac{-2\lambda \langle k \rangle [I]}{N} \left( \frac{g''(\theta) [S]}{N [g'(\theta)]^2} - 1 \right) C_{SS} C_{SI}, \quad (8)$$

综上, 由式(3)一式(8), 得到关于  $\theta, [I], C_{SI}$  和  $C_{SS}$  的封闭方程,

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = -\lambda \langle k \rangle \left( \frac{g(\theta)}{g'(\theta)} \right) \frac{[I]}{N} C_{SI}, \\ \frac{d[I]}{dt} = (\lambda \langle k \rangle g(\theta) C_{SI} - \gamma) [I], \\ \frac{dC_{SS}}{dt} = -2\lambda \langle k \rangle \frac{[I]}{N} C_{SS} C_{SI} \left( \frac{g(\theta) g''(\theta)}{[g'(\theta)]^2} - 1 \right), \\ \frac{dC_{SI}}{dt} = -\lambda \langle k \rangle \left( \frac{[I]}{N} \left( \frac{g(\theta) g''(\theta)}{[g'(\theta)]^2} - 1 \right) + g(\theta) \right) C_{SI}^2 + \\ \lambda \left( \frac{\langle k \rangle g^2(\theta) g''(\theta)}{[g'(\theta)]^2} C_{SS} - 1 \right) C_{SI}. \end{cases} \quad (9)$$

下面分析系统(9)的平衡点。

令系统(9)右边等于0, 当  $[I] = 0$  时, 得到  $\theta = \theta^0, C_{SS} = C_{SS}^0, C_{SI}$  满足:

$$\begin{aligned} -\lambda \left( \langle k \rangle g(\theta^0) C_{SI} - \right. \\ \left. \left( \frac{\langle k \rangle g^2(\theta^0) g''(\theta^0)}{[g'(\theta^0)]^2} C_{SS}^0 - 1 \right) C_{SI} \right) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

解得  $C_{SI} = 0$ , 若  $\frac{\langle k \rangle g^2(\theta^0) g''(\theta^0)}{[g'(\theta^0)]^2} C_{SS}^0 - 1 > 0$ , 则方程(10)还有1个正实根, 记作  $C_{SI}^*$ , 且

$$C_{SI}^* = \frac{1}{\langle k \rangle g(\theta^0)} \left( \frac{\langle k \rangle g^2(\theta^0) g''(\theta^0)}{[g'(\theta^0)]^2} C_{SS}^0 - 1 \right),$$

式中  $\theta^0, C_{SS}^0$  分别表示平衡状态下度为1的易感者的密度及易感者与易感者之间的相关系数。

综上, 当  $\frac{\langle k \rangle g^2(\theta^0) g''(\theta^0)}{[g'(\theta^0)]^2} C_{SS}^0 - 1 \leq 0$  时, 系统(9)有唯一的无病平衡点, 记作  $Q_1(\theta^0, 0, C_{SS}^0, 0)$ 。

当  $\frac{\langle k \rangle g^2(\theta^0) g''(\theta^0)}{[g'(\theta^0)]^2} C_{SS}^0 - 1 > 0$  时, 系统(9)还存在1个无病平衡点, 记作  $Q_2(\theta^0, 0, C_{SS}^0, C_{SI}^*)$ 。

给定网络的度分布为  $p(k) = \frac{\delta^k}{k!} e^{-\delta}$ , 在图 1 中, 模拟出了  $C_{SI}$  随  $\theta^0, C_{SS}^0$  的三维动态变化图, 其中实曲线表示  $\frac{\langle k \rangle g^2(\theta^0) g''(\theta^0)}{[g'(\theta^0)]^2} C_{SS}^0 - 1 = 0$ , 即实曲线为  $C_{SI}^*$  是否存在的分界线。当  $C_{SI}^*$  存在时, 由图 1 知在泊松分布下,  $C_{SI}^*$  随  $\theta^0$  的增大而增大, 随  $C_{SS}^0$  的增大也是增大的。

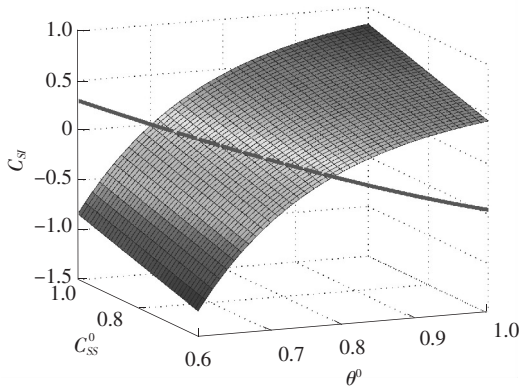


图 1  $C_{SI}$  随  $\theta^0, C_{SS}^0$  的变化图  
Fig.1 Change of  $C_{SI}$  with  $\theta^0$  and  $C_{SS}^0$

### 2 最终规模

由式(4)可知:

$$[S](\infty) = N \sum_{k=0}^{\infty} p_k \theta_{\infty}^k = Ng(\theta_{\infty}), \quad (11)$$

其中  $\theta_{\infty} = \theta(\infty)$ , 则为了计算疾病的最终规模, 必须计算出  $\theta_{\infty}$  值。

由  $\theta(t) = \frac{[S_1](t)}{N_1}$  的定义,  $\theta(t)$  可表示  $t$  时刻,

任意一条连接到易感者节点的边未发生感染的概率, 故  $\theta_{\infty}$  表示任意一条连接到易感者节点的边从未发生感染的概率,  $\theta_{\infty}^k$  表示度为  $k$  的易感者节点从未发生感染的概率。

定义  $F_I$  为一个染病者传染病需要的时长,  $F_R$  为一个染病者恢复需要的时长, 假设传染与恢复的时间是相互独立的, 则随机选择一个易感节点, 记为  $m$ , 则  $m$  被一个染病者邻居感染概率<sup>[15-16]</sup> 为  $P(F_I \leq F_R)$ , 且

$$P(F_I \leq F_R) = \int_0^{\infty} \gamma e^{-\gamma t} \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds dt = \int_0^{\infty} \gamma e^{-\gamma t} (1 - e^{-\lambda t}) dt = \frac{\lambda}{\gamma + \lambda}.$$

定义  $\omega(t)$  为  $t$  时刻  $m$  节点的一个邻居未被感染的概率, 因为这个邻居度  $k$  的概率为  $k p(k) / \langle k \rangle$ ,

又这个邻居只能从除了节点  $m$  以外的其他边传染, 故有:

$$\omega(t) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k p(k) \theta^{k-1}}{\langle k \rangle} = \frac{g'(\theta)}{g'(1)},$$

则  $m$  节点被任意一个邻居传染的概率为  $T(1 - \omega(\infty))$ ,

所以有:

$$\theta_{\infty} = 1 - T(1 - \omega(\infty)) = 1 - T + T \frac{g'(\theta_{\infty})}{g'(1)}, \quad (12)$$

由式(11)和式(12)得:

$$[S](\infty) = N \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left( 1 - T + T \frac{g'(\theta_{\infty})}{g'(1)} \right)^k = Ng \left( 1 - T + T \frac{g'(\theta_{\infty})}{g'(1)} \right).$$

### 3 结 语

利用反卷积逼近方法, 引入节点状态之间的相关系数, 将状态之间的相关系数作为变量, 建立了含有相关系数的 SIR 传染病动力学模型, 将网络中的高维性降低, 提高了模型的可分析性。在以前的研究中, 是对一些量进行近似分析, 分析不够完整。本研究考虑了网络的度分布, 分析无病平衡点的存在性, 给出了平衡状态下易感者和染病者之间的相关系数存在正值的条件, 在泊松分布下, 模拟出了状态之间相关系数的变化图, 更直观地显示了无病平衡点的存在性, 并且利用  $\theta$  的生物学意义, 用概率方法给出了系统的最终规模, 对于控制疾病的规模有很大的意义。

本研究假设了总人口数保持常数, 没有考虑出生死亡, 如果在模型中加入这些因素将会产生其他的动力学现象。本研究发现易感者与易感者之间的相关系数与易感者与染病者的相关系数存在着某种关系, 之后将结合具体的疾病以及数据, 探讨是否能得到两者之间的具体表达关系, 这对于传染病动力学的发展具有研究意义。

### 参考文献/References:

[1] VOLZ E. SIR dynamics in random networks with heterogeneous connectivity[J]. Journal of Mathematical Biology, 2008, 56(3): 293-310.  
[2] HOUSE T, KEELING M J. Insights from unifying modern approximations to infections on networks[J]. Physical Review D Particles & Fields, 2011, 8(54):67-73.  
[3] MILLER J C. A note on a paper by Erik Volz: SIR dynamics in random networks[J]. Journal of Mathematical Biology,

- 2011, 62(3):349-358.
- [4] KEELING M J. The effects of local spatial structure on epidemiological invasions [J]. *Proceedings Biological Sciences*, 1999, 266(1421): 859-867.
- [5] NEWMAN M E. Assortative mixing in networks[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(20):208701.
- [6] NEWMAN M E. Mixing patterns in networks[J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2003, 67(2 Pt 2):026126.
- [7] KEELING M J, RAND D A, MORRIS A J. Correlation models for childhood diseases[J]. *Proceedings of the Royal Society B Biological Sciences*, 1997, 264(1385):1149-1156.
- [8] BAUCH C T. The spread of infectious diseases in spatially structured populations: An invasyory pair approximation[J]. *Mathematical Biosciences*, 2005, 198(2):217-237.
- [9] KIM J H, KOOPMAN J S. HIV transmissions by stage in dynamic sexual partnerships [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2012, 298(4):147-153.
- [10] KIM J H. HIV transmissions by stage and sex role in long-term concurrent sexual partnerships[J]. *Acta Biotheoretica*, 2015, 63(1):33-54.
- [11] 秦文惠, 张菊平. 具有交叉感染的 2 种菌株对逼近模型分析 [J]. *河北工业科技*, 2017, 34(2):103-109.
- QIN Wenhui, ZHANG Juping. Analysis of pair approximation model of two strains with the cross infection[J]. *Hebei Journal of Industrial Science and Technology*, 2017, 34(2): 103-109.
- [12] RAGGETT G F. Modelling the eyam plague[C]//*Bull. Inst. Math. Appls.*1982;221-226.
- [13] SHERBORNE N, BLYUSS K B, KISS I Z. Dynamics of multi-stage infections on networks[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2015, 77 (10):1909-1933.
- [14] VOLZ E, MEYERS L A. SIR epidemics in dynamic contact networks[J].*Quantitative Biology*, 2007,36(2):301-309.
- [15] KEELING M J, GRENFELL B T. Individual-based Perspectives on  $R(0)$ [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2000, 203 (1):51-61.
- [16] KISS I Z, RÖST G, VIZI Z. Generalization of pairwise models to non-markovian epidemics on networks[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(7):487-494.

## 向本期载文的审稿专家致谢

本期《河北工业科技》共发表论文 13 篇。这些论文的发表是与有关专家的认真审读、细查资料、推敲分析、中肯评价分不开的。对此,本刊编辑部特向这些专家表示敬意,对他们的辛勤劳动表示感谢。

本期载文的审稿专家名单如下(按姓名的汉语拼音字母顺序排列):

程时清 董淑兰 杜保安 高 凯 胡建强 金葆康 喀蔚波 李 文  
 李文斌 曲冠政 苏成利 孙晓云 王 峰 王国波 王 凯 王中媛  
 于海丰 张 军 张 宁 张雪君 张志清 赵 杰 赵全胜 赵文波  
 周馨慧 朱敬萍

(本刊编辑部)