

文章编号:1008-1534(2018)01-0037-06

# 基于 T-S 模型的一类时滞非线性系统模型预测控制

王永婧<sup>1</sup>, 张冬雯<sup>2</sup>, 于健骐<sup>3</sup>

(1. 河北科技大学电气工程学院, 河北石家庄 050018; 2. 河北科技大学信息科学与工程学院, 河北石家庄 050018; 3. 中国环境管理干部学院信息工程系, 河北秦皇岛 066004)

**摘要:** 针对具有状态时滞特性的非线性离散系统, 利用线性矩阵不等式的方法和 Lyapunov 稳定性理论, 研究了基于状态反馈的非线性系统模型预测控制问题。基于 T-S 模糊模型对非线性离散系统进行描述并给出一种“min-max”预测控制算法, 采用模型预测控制与模糊理论相结合的方法, 利用平行分布补偿的原理, 通过在每一个采样时刻优化无穷时域的性能指标, 来求解在范数有界条件下相应的状态反馈控制律, 讨论了预测控制器的设计问题, 分析了此设计问题的可解性, 给出了状态反馈控制器基于线性矩阵不等式的设计算法, 保证了系统的稳定性, 通过仿真实例证明了所提控制算法的有效性及系统的稳定性。该方法能够在化工、冶金、机械等具有时滞特性的工业生产过程中得到很好的应用。

**关键词:** 自动控制理论; 非线性离散系统; T-S 模糊模型; 预测控制; 时滞

**中图分类号:** TP13      **文献标志码:** A      **doi:** 10.7535/hbgykj.2018yx01007

## Model predictive control for a class of nonlinear systems with time-delay based on T-S model

WANG Yongjing<sup>1</sup>, ZHANG Dongwen<sup>2</sup>, YU Jianqi<sup>3</sup>

(1. School of Electrical Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China; 2. School of Information Science and Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China; 3. Department of Information Engineering, Environmental Management College of China, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

**Abstract:** Aiming at a class of nonlinear discrete systems with time-delay, model predictive control problem based on state feedback is addressed by using linear matrix inequality and Lyapunov stability theory. The target system is described by the T-S fuzzy model, and the "min-max" type of model predictive control algorithm is given. The model predictive control is combined with fuzzy model, and the principle of parallel distributed compensation is used. At each sampling time, the performance of the infinite time domain is optimized, and the design problem of the predictive controller in the case of the norm bounded is discussed. The solvability of the problem is analyzed and the stability of the system is guaranteed, and the state feedback controller design algorithm based on linear matrix inequality is given. Finally, a simulation example is given to prove the effectiveness of the proposed method and the stability of the systems. This method can be well applied in the model predictive control process in fields of chemistry, metallurgy, and machinery.

收稿日期:2017-05-05; 修回日期:2017-10-12; 责任编辑:陈书欣

基金项目:河北省自然科学基金(F2014208169)

第一作者简介:王永婧(1992—),女,河北石家庄人,硕士研究生,主要从事非线性系统预测控制方面的研究。

通信作者:张冬雯教授。E-mail: zdwtx@163.com

王永婧,张冬雯,于健骐. 基于 T-S 模型的一类时滞非线性系统模型预测控制[J]. 河北工业科技, 2018, 35(1): 37-42.

WANG Yongjing, ZHANG Dongwen, YU Jianqi. Model predictive control for a class of nonlinear systems with time-delay based on T-S model [J]. Hebei Journal of Industrial Science and Technology, 2018, 35(1): 37-42.

**Keywords:** automatic control theory; nonlinear discrete systems; T-S fuzzy model; predictive control; time-delay

模型预测控制因其能够很好地处理控制和状态的硬约束保证系统的稳定性,而被广泛应用于工业系统中<sup>[1-6]</sup>。

在实际工业系统中,系统的非线性是普遍存在的,通常也会存在时滞现象。而时滞现象的出现可能会降低闭环系统的性能,甚至会造成闭环系统的不稳定。文献[7]针对一类具有多重状态时滞和非线性扰动的不确定离散非线性系统构造李雅普诺夫函数,利用无限时域 min-max 优化问题设计状态反馈控制器。文献[8]针对一类具有多重状态和输入时滞的不确定离散非线性系统,充分利用时滞的上下界信息构造改进的二次李雅普诺夫泛函,从而降低系统的保守性。文献[9]针对一类具有非线性扰动且同时存在多重状态和输入时滞的不确定系统,通过滚动优化来求解控制输入,将无限时域二次性能指标优化问题转化为具有 LMI 约束的线性目标最小化问题,在线实时优化性能指标,使得系统状态平滑地趋于稳定。文献[10]针对一类输入输出受限的不确定离散时滞系统,提出了输出反馈鲁棒预测控制方法,并给出了输出反馈控制器存在的充分条件及构造方法。文献[11]将非线性预测控制与模糊系统理论相结合,基于 Lyapunov 方法设计了鲁棒自适应控制律,仅需在线调整 2 个参数,无需调整权值,从而简化了控制器的设计。文献[12]研究了双模 MPC 的设计方法,通过引入鲁棒不变集构造关于状态估计的可行集和终端约束集,实现了输出反馈双模控制。而对于有限时域预测控制算法,在文献[13]中,饱和和局部控制律和终端加权矩阵均是通过 LMI 在线约束的最小化问题求解的,从而提高了闭环系统的性能。然而,范数有界不确定性也能很好地描述非线性系统的不确定性。T-S 模型能够良好地描述非线性系统的特性,将其与预测控制的优化算法相结合,能够实现非线性系统的优化控制,取得较好的控制效果。

将 min-max 无限时域预测控制的方法拓展到基于 T-S 模糊模型描述的范数有界不确定非线性系统预测控制器设计当中,利用相关的 Lyapunov-Krasovskii 函数结合线性矩阵不等式,实现该类非线性系统的预测控制,最后通过仿真实例验证算法的有效性。

## 1 问题描述

考虑一类由下述 T-S 模糊模型描述的一般时滞非线性系统:

Rule  $p$

IF  $z_1(k)$  is  $M_{p1}, \dots, z_g(k)$  is  $M_{pg}$ ,

THEN

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) &= (\mathbf{A}_p + \Delta\mathbf{A}_p)\mathbf{x}(k|k) + \\ & (\mathbf{B}_p + \Delta\mathbf{B}_p)\mathbf{u}(k|k) + \\ & (\mathbf{A}_{dp} + \Delta\mathbf{A}_{dp})\mathbf{x}(k-d|k), \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\phi}(k), k \in [-d, 0],$$

$$\|\mathbf{u}(k)\|_2 \leq u_{\max}, \quad (1)$$

式中:  $z_1(k), z_2(k), \dots, z_g(k)$  为前件变量;  $p = 1, 2, \dots, L, L$  为模糊规则数;  $M_{pm} (m = 1, 2, \dots, g)$  为模糊集合;  $\mathbf{x}(k|k) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(k|k) \in \mathbb{R}^m$  分别表示系统状态变量和控制输入变量;  $d$  是状态滞后时间常数;  $\boldsymbol{\phi}(k)$  是定义在  $[-d, 0]$  上的初始函数;  $\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{A}_{dp}$  表示第  $p$  个系统中具有适当维数的已知常数矩阵;  $\Delta\mathbf{A}_p, \Delta\mathbf{B}_p, \Delta\mathbf{A}_{dp}$  为范数有界时变不确定矩阵,表示被控模型的参数不确定性,并且满足下式:

$$\Delta\mathbf{A}_p = \mathbf{D}_p \mathbf{F}(k) \mathbf{E}_{1p},$$

$$\Delta\mathbf{B}_p = \mathbf{D}_p \mathbf{F}(k) \mathbf{E}_{2p},$$

$$\Delta\mathbf{A}_{dp} = \mathbf{D}_p \mathbf{F}(k) \mathbf{E}_{3p}.$$

于是系统的不确定性可以描述为

$$[\Delta\mathbf{A}_p, \Delta\mathbf{B}_p, \Delta\mathbf{A}_{dp}] = \mathbf{D}_p \mathbf{F}(k) [\mathbf{E}_{1p}, \mathbf{E}_{2p}, \mathbf{E}_{3p}], \quad (2)$$

式中:  $p = 1, 2, \dots, L; \mathbf{D}_p, \mathbf{E}_{1p}, \mathbf{E}_{2p}, \mathbf{E}_{3p}$  为适当维数的已知常数矩阵;  $\mathbf{F}(k)$  是表示系统模型不确定性的时变矩阵,其元素均 Lebesgue 可测,且满足  $\mathbf{F}(k)^\top \mathbf{F}(k) \leq \mathbf{I}, \mathbf{I}$  为适当维数的单位矩阵。

为了表述简便清晰,令  $x(k+i) = x(k+i|k), u(k+i) = u(k+i|k)$ , 分别表示系统在时刻  $k$  预测  $k+i$  时刻的系统状态与输入。

上述模糊模型的每一个方程都表示一个“子系统”,于是整个系统的状态方程可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \sum_{p=1}^L \theta_p(\mathbf{z}(k)) [\hat{\mathbf{A}}_p \mathbf{x}(k) + \\ & \hat{\mathbf{B}}_p \mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{A}}_{dp} \mathbf{x}(k-d)], \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{z}(k) = [z_1(k), z_2(k), \dots, z_g(k)]^\top$ ;

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_p &= \mathbf{A}_p + \Delta\mathbf{A}_p, \hat{\mathbf{B}}_p = \mathbf{B}_p + \Delta\mathbf{B}_p, \hat{\mathbf{A}}_{dp} = \mathbf{A}_{dp} + \\ \Delta\mathbf{A}_{dp}; \theta_p(\mathbf{z}(k)) &= \frac{\omega_p(\mathbf{z}(k))}{\sum_{p=1}^L \omega_p(\mathbf{z}(k))}, \omega_p(\mathbf{z}(k)) = \end{aligned}$$

$\prod_{m=1}^g M_{pm}(z_m(k))$ , 其中  $\prod$  为模糊算子, 在此取其为其乘积,  $\theta_p(z(k))$  表示归一化的隶属度函数,  $w_p(z(k))$  是第  $p$  条规则下  $z(k)$  对应于模糊集合的隶属度函数,  $M_{pm}(z_m(k))$  表示模糊集合  $M_{pm}$  关于  $z_m(k)$  的隶属函数。一般情况下, T-S 模糊模型的隶属度函数指的是归一化的隶属度函数, 即  $\theta_p(z(k)), p = 1, 2, \dots, L$ 。因为  $w_p(z(k)) > 0$ ,  $\sum_{p=1}^L w_p(z(k)) > 0$ , 所以  $0 \leq \theta_p(z(k)) \leq 1$ , 并且  $\sum_{p=1}^L \theta_p(z(k)) = 1$ 。

对于式(1)描述的系统, 利用平行分布补偿原理设计状态反馈控制器, 其控制器结构可由以下一系列模糊规则组成:

Rule  $p$   
 IF  $z_1(k)$  is  $M_{p1}, \dots, z_g(k)$  is  $M_{pg}$ ,  
 THEN  
 $u(k) = K_p x(k), \quad p = 1, 2, \dots, L,$

式中  $K_p$  为需求解的状态反馈增益。

整个系统的控制律为各个局部反馈控制输出的加权平均和, 全局状态反馈控制律可用式(4)描述:

$$u(k) = \sum_{p=1}^L \theta_p(z(k)) K_p x(k), \quad (4)$$

则全局闭环模糊系统可表示为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{p=1}^L \theta_p(z(k)) \sum_{p=1}^L \theta_p(z(k)) \\ &\quad \{[\hat{A}_p + \hat{B}_p K_p]x(k) + \hat{A}_{dp} x(k-d)\}, \\ x(k) &= \phi(k), \quad -d \leq k \leq 0, \\ \|u(k)\|_2 &\leq u_{\max}. \end{aligned} \quad (5)$$

找到最优控制输入  $U(k)$ , 其为  $U(k) = [u^T(k), u^T(k+1), u^T(k+2), \dots]$ , 在  $k$  时刻仅执行第 1 个输入项  $u(k)$ , 并且在  $k$  时刻最小化、最坏情况下的性能指标  $J$ , 即

$$\min_{\substack{u(k+i), \\ i=0,1,\dots,L}} \max_{\substack{[\hat{A}_p(k+i)B_p(k+i), \Delta \hat{A}_p(k+i)], \\ i=0,1,\dots,L}} J(k), \quad (6)$$

式中  $J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [x^T(k+i)Qx(k+i) + u^T(k+i) \cdot Ru(k+i)]$ ,  $Q, R$  均为已知的正定权矩阵。

为得出本文结论, 首先给出以下引理。

引理 1<sup>[14]</sup> (Schur 补引理) 给定对称矩阵

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix},$$

则下列问题是等价的:

- 1)  $S < 0$ ;
- 2)  $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- 3)  $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ 。

Schur 补引理可以将某些非线性矩阵不等式问

题转化为与之等价的线性矩阵不等式问题。

引理 2<sup>[15]</sup> 设矩阵  $N_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, i = 1, 2, \dots, L$ , 对称正定矩阵  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , 若存在  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  且  $\sum_{i=1}^L \alpha_i = 1$ , 则有:

$$\left( \sum_{i=1}^L \alpha_i N_i \right)^T P \left( \sum_{i=1}^L \alpha_i N_i \right) \leq \sum_{i=1}^L \alpha_i N_i^T P N_i.$$

引理 3<sup>[16]</sup> 给定适当维数的矩阵  $G_1, G_2$  和对称矩阵  $\Omega$ , 对所有满足  $F^T(t)F(t) \leq I$  的矩阵  $F(t)$ , 有:

$$\Omega + G_1 F(t) G_2 + G_2^T F^T(t) G_1^T < 0,$$

当且仅当存在一个标量  $\epsilon > 0$ , 使不等式  $\Omega + \epsilon G_1 G_1^T + \frac{1}{\epsilon} G_2^T G_2 < 0$  成立。

## 2 非线性预测控制策略

### 2.1 预测控制器的设计

定理 1 假设  $x(k)$  为系统在  $k$  采样时刻的状态测量值, 子系统的状态反馈控制器为  $K_p = Y_p X^{-1} (p = 1, 2, \dots, L)$ , 系统(5)实现 Lyapunov 渐近稳定的充分条件是各子系统均存在变量  $\epsilon > 0, \gamma > 0$ , 以及矩阵  $X > 0, W > 0, Y_p > 0$  满足如下 LMI 约束优化问题, 即

$$\begin{bmatrix} I & x(k) & x(k-1) & \cdots & x(k-d) \\ x^T(k) & X & 0 & \cdots & 0 \\ x^T(k-1) & 0 & W & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x^T(k-d) & 0 & 0 & \cdots & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} H + \epsilon E^T E & D \\ * & -\epsilon I \end{bmatrix} \leq 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y_p^T \\ * & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (9)$$

式中,

$$E = [0 \quad (E_{1p} + E_{2p} K_p) X \quad E_{3p} W \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$D = [D_p^T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$H =$$

$$\begin{bmatrix} -X & (A_p + B_p K_p) X & A_{dp} W & 0 & 0 & 0 \\ * & -X & 0 & Y_p^T R^{\frac{1}{2}} & X Q^{\frac{1}{2}} & X \\ * & * & -W & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & * & -W \end{bmatrix}.$$

在鲁棒性问题的分析研究中, 通常是基于二次稳定的概念来寻求问题的解决办法, 对于前文描述

的 T-S 模糊系统, 本文采用的是典型的基于二次稳定概念的 Lyapunov-Krasovskii 函数:

$$V(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^d \mathbf{x}^T(k-j) \mathbf{S} \mathbf{x}(k-j), \quad (10)$$

其中  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0, \mathbf{S} = \mathbf{S}^T > 0$ .

对于整个闭环模糊系统(5), 由于不容易直接求解式(6)描述的 min-max 性能指标, 故而本文引入性能指标的上界, 通过进一步最小化其上界来获得相应的状态反馈。假设在每一采样时刻, 都存在式(11)不等式:

$$V(k+i+1) - V(k+i) \leq -[\mathbf{x}^T(k+i) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+i) + \mathbf{u}^T(k+i) \mathbf{R} \mathbf{u}(k+i)]. \quad (11)$$

系统渐近稳定, 需要保证当  $x(\infty | k) = 0$  时,  $V(\infty | k) = 0$  成立。将式(11)从  $i=0$  到  $i=\infty$  进行叠加, 得到:

$$-V(k) \leq -J(k). \quad (12)$$

进一步地, 性能指标的上界转化为

$$\max_{\substack{\hat{A}_p(k+i), \hat{B}_p(k+i), \Delta \hat{A}_p(k+i), \\ i \geq 0}} J(k) \leq V(k) \leq \gamma, \quad (13)$$

于是, 性能指标的优化问题就转化为

$$\min \gamma. \quad (14)$$

令  $\mathbf{X} = \gamma \mathbf{P}^{-1} > 0, \mathbf{W} = \gamma \mathbf{S}^{-1} > 0$ , 于是对式(13)进行化简, 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^d \mathbf{x}^T(k-j) \mathbf{S} \mathbf{x}(k-j) &\leq \gamma, \\ \mathbf{x}^T(k) \gamma \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^d \mathbf{x}^T(k-j) \gamma \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x}(k-j) &\leq \gamma, \\ \mathbf{x}^T(k) \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^d \mathbf{x}^T(k-j) \mathbf{W}^{-1} \mathbf{x}(k-j) &\leq \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (15)$$

对式(15)利用 Schur 补引理可得式(7)。

对式(8)进行证明。因有:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{p=1}^L \theta_p \sum_{p=1}^L \theta_p [\mathbf{E}_{pp} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}_{dp} \mathbf{x}(k-d)],$$

其中  $\mathbf{E}_{pp} = \hat{\mathbf{A}}_p + \hat{\mathbf{B}}_p \mathbf{K}_p$ , 将其代入式(11)可得:

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) + \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) = & \left\{ \sum_{p=1}^L \theta_p \sum_{p=1}^L \theta_p [(\hat{\mathbf{A}}_p + \hat{\mathbf{B}}_p \mathbf{K}_p) \mathbf{x}(k) + \right. \\ & \hat{\mathbf{A}}_{dp} \mathbf{x}(k-d)] \}^T \mathbf{P} \left\{ \sum_{p=1}^L \theta_p \sum_{p=1}^L \theta_p [(\hat{\mathbf{A}}_p + \hat{\mathbf{B}}_p \mathbf{K}_p) \cdot \right. \\ & \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}_{dp} \mathbf{x}(k-d)] \} - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) + \\ & \mathbf{x}^T(k) \mathbf{S} \mathbf{x}(k) + \left[ \sum_{p=1}^L \theta_p \mathbf{K}_p \mathbf{x}(k) \right]^T \mathbf{R} \left[ \sum_{p=1}^L \theta_p \mathbf{K}_p \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\left. \mathbf{x}(k) \right] + \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-d) \mathbf{S} \mathbf{x}(k-d), \quad (16)$$

对式(16)利用引理 2 可得:

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) + \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \leq & \sum_{p=1}^L \theta_p \sum_{p=1}^L \theta_p [\mathbf{E}_{pp} \mathbf{x}(k) + \\ & \hat{\mathbf{A}}_{dp} \mathbf{x}(k-d)]^T \mathbf{P} [\mathbf{E}_{pp} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}_{dp} \mathbf{x}(k-d)] + \\ & \sum_{p=1}^L \theta_p [\mathbf{K}_p \mathbf{x}(k)]^T \mathbf{R} [\mathbf{K}_p \mathbf{x}(k)] - \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k) + \\ & \mathbf{x}^T(k) \mathbf{S} \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-d) \cdot \\ & \mathbf{S} \mathbf{x}(k-d), \end{aligned}$$

整理可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{pp}^T \mathbf{P} \mathbf{E}_{pp} + \mathbf{K}_p^T \mathbf{R} \mathbf{K}_p - \mathbf{P} + \mathbf{S} + \mathbf{Q} & \mathbf{E}_{pp}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{A}}_{dp} \\ * & \hat{\mathbf{A}}_{dp}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{A}}_{dp} - \mathbf{S} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (17)$$

整理式(17)可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_p^T \mathbf{R} \mathbf{K}_p - \mathbf{P} + \mathbf{S} + \mathbf{Q} & 0 \\ * & -\mathbf{S} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{pp}^T \\ \hat{\mathbf{A}}_{dp}^T \end{bmatrix} (-\mathbf{P}) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{pp} & \hat{\mathbf{A}}_{dp} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (18)$$

将式(18)分别左乘右乘  $\text{diag}\{\gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{I} \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{X} \quad \gamma^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}\}$  得到:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{E}_{pp} \mathbf{X} & \hat{\mathbf{A}}_{dp} \mathbf{W} \\ * & -\mathbf{X} + \gamma^{-1} \mathbf{X} (\mathbf{K}_p^T \mathbf{R} \mathbf{K}_p + \mathbf{S} + \mathbf{Q}) \mathbf{X} & 0 \\ * & * & -\mathbf{W} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (19)$$

整理式(19), 并对其利用 Schur 补引理可得:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{E}_{pp} \mathbf{X} & \hat{\mathbf{A}}_{dp} \mathbf{W} & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mathbf{X} & 0 & \mathbf{Y}_p^T \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{X} \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{X} \\ * & * & -\mathbf{W} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma \mathbf{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma \mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\mathbf{W} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{Y}_p = \mathbf{K}_p \mathbf{X}$ 。

定义

$$\mathbf{H} =$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & (\mathbf{A}_p + \mathbf{B}_p \mathbf{K}_p) \mathbf{X} & \mathbf{A}_{dp} \mathbf{W} & 0 & 0 & 0 \\ * & -\mathbf{X} & 0 & \mathbf{Y}_p^T \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{X} \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{X} \\ * & * & -\mathbf{W} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma \mathbf{I} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma \mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\mathbf{W} \end{bmatrix}.$$

将式(20)进行转化, 有:

$$\mathbf{H} + \mathbf{D} \mathbf{F}_p \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{F}_p^T \mathbf{D}^T \leq 0,$$

式中  $E = [0 \ (E_{1p} + E_{2p}K_p)X \ E_{3p}W \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $D = [D_p^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 根据引理 3 可知, 存在一个标量  $\epsilon > 0$ , 使得  $(DF_pE)^T + DF_pE < \frac{1}{\epsilon}DD^T + \epsilon E^TE$  成立。

$$H + \frac{1}{\epsilon}DD^T + \epsilon E^TE \leq 0, \quad (21)$$

那么当式(21)成立时, 必有

$$H + (DF_pE)^T + DF_pE \leq 0,$$

于是对式(21)利用 Schur 补引理可得式(8)。

讨论如何将输入约束转化成线性矩阵不等式, 在采样  $k$  时刻, 输入满足式(5)中的约束。因为  $x^T(k)Px(k) + \sum_{j=1}^d x^T(k-j)Sx(k-j) \leq \gamma$ , 于是定义一个椭圆不变集  $\epsilon = \{x^T P^{-1}x \leq \gamma\}$ , 又因  $X = \gamma P^{-1} > 0$ , 所以有  $\epsilon = \{x^T X^{-1}x \leq 1\}$ 。因为  $Y_p = K_p X$ ,  $u(k+i) = \sum_{p=1}^L \theta_p K_p x(k+i)$ , 于是有:

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|u(k+i)\|_2^2 &= \\ \max_{i \geq 0} \left\| \sum_{p=1}^L \theta_p Y_p X^{-1} x(k+i) \right\|_2^2, \end{aligned}$$

因  $0 \leq \theta_p(z(k)) \leq 1$ , 输入约束可进行如下转化:

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|u(k+i)\|_2^2 &\leq \max_{i \geq 0} \|Y_p X^{-1} x(k+i)\|_2^2 = \\ \max_{x \in \epsilon} \|Y_p X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} x(k+i)\|_2^2 &\leq \\ \max_{x \in \epsilon} \|Y_p X^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 \cdot \|X^{-\frac{1}{2}} x(k+i)\|_2^2 &\leq \\ \max_{x \in \epsilon} \|Y_p X^{-\frac{1}{2}}\|_2^2 &= \\ \lambda_{\max}(Y_p X^{-\frac{1}{2}})^T (Y_p X^{-\frac{1}{2}}) &= \\ \lambda_{\max}(Y_p X^{-1}) (Y_p X^{-1})^T &= \\ \lambda_{\max}(Y_p X^{-1} Y_p^T). \end{aligned} \quad (22)$$

对式(22)利用 Schur 补引理可知, 输入约束等价于式(9)。显然, 式(7)一式(9)是关于  $\gamma > 0, \epsilon > 0, X > 0, W > 0, Y_p > 0$  的线性矩阵不等式组, 可用 Matlab 中的 Control LMI 工具箱求解, 证毕。

### 2.2 预测控制器控制算法

Step1 已知时滞非线性系统(5),  $x(0), u_{\max}$  均已知, 给定综合性能指标矩阵  $Q, R$ 。

Step2 设  $k = 1$ 。

Step3 检测当前时刻系统状态  $x(k)$ , 获得过去时刻的系统状态  $x(k-1), x(k-2), \dots, x(k-d)$ 。其中  $x(-1) = x(-2) = \dots = x(-d) = x(0)$ 。

Step4 用 Matlab 中 LMI 工具箱求解定理 1 中的约束优化问题(7)一(9), 得到  $k$  时刻第  $q$  条规则下各个变量的最优解, 即可得到各个子系统的  $Y_p^*$ 。

Step5 计算  $k$  时刻各个子系统的状态反馈控制律  $K_p = Y_p X^{-1}$ , 并将其全部作用于全局闭环模糊

系统(5), 对系统实施控制, 并检测系统在  $k+1$  时刻的状态值。

Step6 令  $k = k + 1$ , 重复 Step3—Step6。

### 3 仿真实例

为证明上述方案的可行性, 采用 T-S 模型描述的非线性系统进行仿真。

规则 1

IF  $x_1(k)$  is  $M_{11}(x(k))$ ,

THEN

$$x(k+1) = (A_1 + \Delta A_1)x(k) + (B_1 + \Delta B_1)u(k) + (A_{d1} + \Delta A_{d1})x(k-d).$$

规则 2

IF  $x_2(k)$  is  $M_{21}(x(k))$ ,

THEN

$$x(k+1) = (A_2 + \Delta A_2)x(k) + (B_2 + \Delta B_2)u(k) + (A_{d2} + \Delta A_{d2})x(k-d).$$

式中:  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.14 & 0.9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix},$

$A_{d1} = A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$ , 且范

数有界不确定矩阵  $[\Delta A_p, \Delta B_p, \Delta A_{dp}] = D_p F(k) [E_{1p}, E_{2p}, E_{3p}]$ ,  $p = 1, 2$ 。其中  $F(k) =$

$\sin(k), D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_{11} = E_{12} = [0.1 \ 0.1],$

$E_{21} = E_{22} = [0 \ 0.1], E_{31} = E_{32} = [0.2 \ 0]$ 。给定综

合性能指标矩阵  $Q = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 系统控制输入为

$\|u\| \leq 1$ , 取  $d = 2$ , 初始状态为  $x(0) = [-0.8 \ 0.5]^T$ 。选取隶属度函数:  $\theta_1(x(k)) =$

$\frac{1}{1 + e^{(-2x(k))}}, \theta_2(x(k)) = 1 - \theta_1(x(k))$ , 其结构如图

1 所示。通过求解预测控制算法中的优化问题得到模糊预测控制策略。仿真结果如图 2 和图 3 所示。

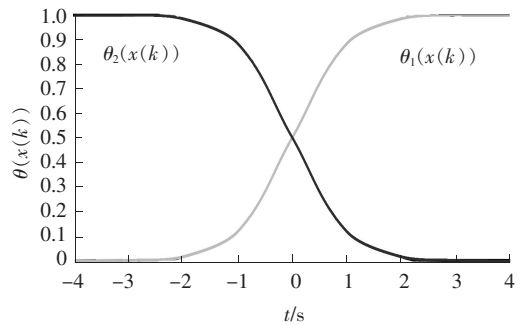


图 1 被控对象的隶属度函数

Fig.1 Membership functions of the controlled object

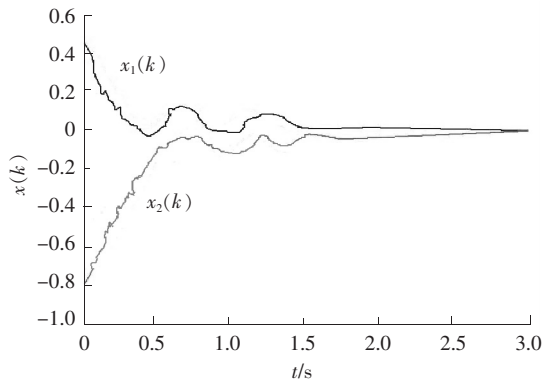


图2 系统状态轨迹

Fig.2 State trajectory of the system

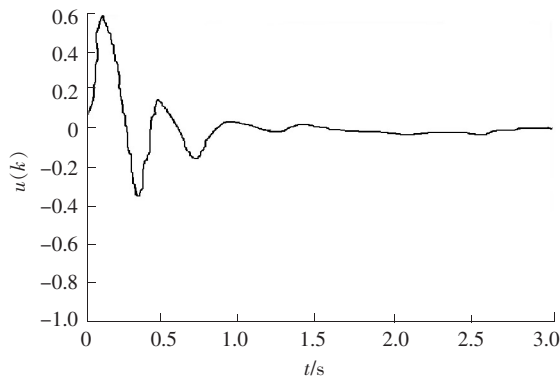


图3 系统控制输入

Fig.3 Control input of the system

## 4 结 语

将模型预测控制的方法应用于具有输入约束与状态时滞的非线性离散系统中,将模糊理论与预测控制相结合,利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函与 LMI 技术设计了模糊状态反馈控制律,优化了系统性能指标,给出了一种适用于此类系统的预测控制算法,最后通过仿真验证,控制算法具有较好的控制性能。该方法仍存在不足之处,在时滞问题的处理上可以考虑时变时滞的情况,对系统进行预测控制,从而更加全面的考虑系统的时滞情况。

## 参考文献/References:

[1] 席裕庚,李德伟,林姝.模型预测控制——现状与挑战[J].自动化学报,2013,39(3):222-236.  
XI Yugeng, LI Dewei, LIN Shu. Model predictive control: Status and challenges[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(3): 222-236.

[2] 席裕庚.预测控制[M].北京:国防工业出版社,2013.

[3] 刘刚,秦伟伟,刘洁瑜,等.运用区间算法的约束非线性系统鲁棒模型预测控制[J].控制理论与应用,2014,31(6):735-740.  
LIU Gang, QIN Weiwei, LIU Jieyu, et al. RMPC for constrained nonlinear systems based on interval arithmetic[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(6): 735-740.

[4] 何德峰,丁宝苍,于树友.非线性系统模型预测控制若干基本特点与主题回顾[J].控制理论与应用,2013,30(3):273-287.  
HE Defeng, DING Baocang, YU Shuyou. Review of fundamental properties and topics of model predictive control for nonlinear systems [J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(3): 273-287.

[5] 张冬雯.不确定系统的鲁棒分析与综合:矩阵不等式方法[M].北京:国防工业出版社,2014.

[6] ZHANG Dongwen. Constrained robust model predictive control for time-delay descriptor systems with linear fractional uncertainty[J]. Engineering Review, 2015, 35(2):147-155.

[7] 周卫东,郑兰,廖成毅,等.多重状态时滞系统的 min-max 鲁棒预测控制[J].哈尔滨工程大学学报,2016,37(12):1685-1690.  
ZHOU Weidong, ZHENG Lan, LIAO Chengyi, et al. Min-max robust predictive control for multi-state time-delay systems[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2016, 37(12): 1685-1690.

[8] 周卫东,郑兰,廖成毅,等.多重时滞离散非线性系统的鲁棒预测控制[J].哈尔滨工业大学学报,2015,47(9):24-30.  
ZHOU Weidong, ZHENG Lan, LIAO Chengyi, et al. Robust prediction control for multiple time delay discrete nonlinear system[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2015, 47(9): 24-30.

[9] 苏成利,赵家程,李平.一类具有非线性扰动的多重时滞不确定系统鲁棒预测控制[J].自动化学报,2013,39(5):644-649.  
SU Chengli, ZHAO Jiacheng, LI Ping. Robust predictive control for a class of multiple time delay uncertain systems with nonlinear disturbance [J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(5): 644-649.

[10] 陈秋霞,俞立.不确定离散时滞系统的输出反馈鲁棒预测控制[J].控制理论与应用,2007,24(3):401-406.  
CHEN Qiuxia, YU Li. Robust model predictive control for uncertain discrete time-delay systems via dynamic output feedback [J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(3): 401-406.

[11] 方炜,姜长生.一类基于模糊系统的非线性鲁棒自适应预测控制[J].西安交通大学学报,2008,42(6):669-673.  
FANG Wei, JIANG Changsheng. Nonlinear robust adaptive predictive control based on fuzzy systems [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(6): 669-673.

[12] 李志军.约束模型预测控制的稳定性与鲁棒性研究[D].北京:华北电力大学,2005.  
LI Zhijun. Research on Stability and Robustness of Constrained Model Predictive Control [D]. Beijing: North China Electric Power University, 2005.

[13] LU Mei, JIN Chengbo, SHAO Huihe. An improved fuzzy predictive control algorithm and its application to an industrial CSTR process [J]. Chinese Journal of Chemical Engineering, 2009, 17(1): 100-107.

[14] 梁华清,张冬雯,邢少光,等.基于多层概率集的随机系统预测控制[J].河北科技大学学报,2016,37(2):205-212.  
LIANG Huaqing, ZHANG Dongwen, XING Shaoguang, et al. Predictive control for stochastic systems based on multi-layer probabilistic sets [J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2016, 37(2): 205-212.

[15] CAO Yongyan, LIN Zongli, SHAMASH Y. Set invariance analysis and gain-scheduling control for LPV systems subject to actuator saturation [J]. Systems & Control Letters, 2002, 46(2): 137-151.

[16] ZHANG Liqian, HUANG Biao. Robust model predictive control of singular systems [J]. Transactions on Automatic Control, 2004, 49(6): 1000-1006.